

# Spis treści

Przedmowa .....	7
1. WPROWADZENIE .....	9
2. METODA PRZEMIESZCZEŃ – ZAGADNIENIA STATYCZNE .....	19
2.1. Element standardowy o czterech stopniach swobody .....	19
2.2. Element standardowy w rozwiązywaniu pojedynczych prętów .....	23
2.3. Macierze globalne układów opisywanych współrzędnymi rotacyjnymi .....	26
2.4. Macierze globalne jako suma macierzy elementów .....	29
2.5. Przykłady rozwiązywania belek .....	31
2.6. Przykłady rozwiązywania konstrukcji – element standardowy .....	33
2.7. Ramy przesuwne – element o pięciu stopniach swobody .....	40
2.8. Identyfikacja bazy współrzędnych uogólnionych .....	44
2.8.1. Wprowadzenie .....	44
2.8.2. Uwagi uwzględniane w trakcie identyfikacji .....	46
2.8.3. Przykłady podpór oraz połączeń .....	46
2.8.4. Istota warunków spełnianych tożsamościowo .....	47
2.8.5. Przykłady .....	49
3. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ORAZ MACIERZ SZTYWNOŚCI	
PRĘTA PROSTEGO .....	53
3.1. Równanie różniczkowe .....	53
3.1.1. Podstawowe zależności .....	53
3.1.2. Przykłady .....	54
3.2. Macierz sztywności .....	60
3.2.1. Podstawowe zależności .....	60
3.2.1.1. Współrzędne uogólnione .....	60
3.2.1.2. Siły uogólnione .....	64
3.2.2. Macierz sztywności .....	64
3.3. Wzory transformacyjne 1 .....	65
3.3.1. Pręt sztywno-sztywny .....	65
3.3.2. Pręt sztywno-przegubowy .....	66
3.4. Wzory transformacyjne 2 .....	68
3.4.1. Pręt sztywno-sztywny .....	68
3.4.2. Pręt sztywno-przegubowy .....	69
3.5. Przykłady .....	69
3.6. Wyznaczanie sił węzłowych pręta na podstawie rozwiązań równania różniczkowego .....	72

4. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ORAZ MACIERZ SZTYWNOŚCI PRĘTA PROSTEGO OBCIĄŻONEGO SIŁĄ OSIOWĄ .....	74
4.1. Równanie różniczkowe .....	74
4.1.1. Podstawowe zależności .....	74
4.1.2. Przykłady .....	76
4.2. Macierz sztywności .....	81
4.2.1. Podstawowe zależności .....	81
4.2.1.1. Współrzędne uogólnione .....	81
4.2.1.2. Siły uogólnione .....	83
4.2.2. Ogólna postać macierzy sztywności .....	84
4.2.3. Macierz sztywności przy $\lambda = 0$ .....	85
4.2.4. Tablice elementów $K_o(\lambda)$ .....	86
4.2.5. Przykłady .....	91
5. BELKA SPOCZYWAJĄCA NA PODŁOŻU WINKLERA .....	95
5.1. Wprowadzenie .....	95
5.2. Równanie różniczkowe .....	97
5.2.1. Podstawowe zależności .....	97
5.2.2. Przykłady .....	100
5.3. Macierz sztywności .....	104
5.3.1. Podstawowe zależności .....	104
5.3.1.1. Współrzędne uogólnione .....	104
5.3.1.2. Siły uogólnione .....	105
5.3.2. Ogólna postać macierzy sztywności .....	106
5.3.3. Macierz sztywności przy $\lambda \rightarrow 0$ .....	107
5.3.4. Tablice elementów macierzy $K_o(\lambda)$ .....	107
5.3.5. Przykłady .....	114
6. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE DRGAŃ ORAZ DYNAMICZNA MACIERZ SZTYWNOŚCI PRĘTA PROSTEGO .....	126
6.1. Równanie różniczkowe .....	126
6.1.1. Podstawowe zależności .....	126
6.1.2. Przykłady .....	129
6.2. Macierz sztywności .....	133
6.2.1. Podstawowe zależności .....	133
6.2.1.1. Współrzędne uogólnione .....	133
6.2.1.2. Siły uogólnione .....	134
6.2.2. Ogólna postać macierzy sztywności .....	135
6.2.3. Tablice elementów $K_o(\lambda)$ .....	136
6.2.4. Przykłady .....	141

7. ELEMENT BELKOWY – ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONE .....	146
7.1. Wprowadzenie .....	146
7.2. Funkcje kształtu .....	146
7.3. Równanie równowagi elementu – postać ogólna .....	150
7.4. Macierz sztywności elementu .....	152
7.5. Wektor równoważników obciążenia równomiernie rozłożonego .....	154
7.6. Wektor równoważników obciążenia siłą skupioną .....	156
7.7. Wektor równoważników obciążenia momentem rozłożonym .....	158
7.8. Wektor równoważników obciążenia momentem skupionym .....	160
7.9. Wektor równoważników obciążenia siłą ściskającą .....	162
7.10. Wektor równoważników obciążenia odporem podłoża .....	164
7.11. Wektor równoważników obciążenia siłami bezwładności .....	166
7.12. Ogólne równanie równowagi pręta .....	168
7.13. Zestawienie macierzy dotyczących różnych zagadnień .....	168
7.14. Przykłady .....	169
7.14.1. Wprowadzenie .....	169
7.14.2. Drgania swobodne wybranych belek jednoprzęsłowych .....	169
7.14.2.1. Belka 1 .....	170
7.14.2.2. Belka 2 .....	171
7.14.2.3. Belka 5 .....	172
7.14.3. Siły krytyczne wybranych belek jednoprzęsłowych .....	173
7.14.3.1. Belka 1 .....	173
7.14.3.2. Belka 3 .....	174
7.14.3.3. Belka 4 .....	175
7.14.4. Rozwiązania belki obustronnie utwierdzonej .....	176
7.14.4.1. Wprowadzenie .....	176
7.14.4.2. Belka obciążona równomiernie spoczywająca na podłożu ...	177
7.14.4.3. Częstości drgań własnych .....	183
7.14.4.4. Siła krytyczna .....	183
7.14.5. Ocena zbieżności rozwiązań .....	184
7.14.5.1. Siły krytyczne belek prostych .....	184
7.14.5.2. Częstości drgań belek prostych .....	184
7.14.6. Ocena zbieżności rozwiązań przybliżonych belek spoczywających na podłożu .....	186
7.14.6.1. Belka 1 .....	186
7.14.6.2. Belka 2 .....	188
8. PRZYKŁADY .....	190
8.1. Wprowadzenie .....	190
8.2. Belka dwuprzęsłowa .....	191
8.2.1. Model obliczeniowy .....	191
8.2.2. Drgania własne (przypadek: $k = 0$ , $S = 0$ ) .....	193

8.2.2.1. Rozwiązanie dokładne .....	193
8.2.2.2. Rozwiązanie przybliżone .....	194
8.2.3. Siła krytyczna (przypadek: $k = 0$ , $m = 0$ ) .....	194
8.2.3.1. Rozwiązanie dokładne .....	194
8.2.3.2. Rozwiązanie przybliżone .....	195
8.2.4. Drgania własne (przypadek: $k \neq 0$ , $S = 0$ ) .....	196
8.2.5. Drgania własne (przypadek: $k = 0$ , $S \neq 0$ ) .....	197
8.2.6. Siła krytyczna (przypadek: $k \neq 0$ , $m = 0$ ) .....	198
8.2.7. Drgania własne (przypadek: $k \neq 0$ , $S \neq 0$ ) .....	199
8.3. Rama ortogonalna .....	200
8.3.1. Model obliczeniowy .....	200
8.3.2. Drgania własne (przypadek $S = 0$ ) .....	202
8.3.2.1. Rozwiązanie dokładne .....	202
8.3.2.2. Rozwiązanie przybliżone .....	202
8.3.3. Siła krytyczna (przypadek $m = 0$ ) .....	202
8.3.3.1. Rozwiązanie dokładne .....	202
8.3.3.2. Rozwiązanie przybliżone .....	203
8.3.4. Drgania własne (przypadek $S \neq 0$ ) .....	203
9. WYBRANE ZAGADNIENIA .....	205
9.1. Rama prostokątna na podłożu .....	205
9.1.1. Wprowadzenie .....	205
9.1.2. Przypadki szczególne .....	208
9.1.2.1. Rama obciążona statycznie .....	208
9.1.2.2. Stateczność początkowa .....	215
9.1.2.3. Drgania własne .....	218
9.2. Rama prostokątna ze sztywnym rygłem .....	220
9.2.1. Wprowadzenie .....	220
9.2.2. Stateczność początkowa .....	223
9.2.3. Drgania własne .....	224
9.3. Belka dwuprzęsłowa .....	226
9.3.1. Stateczność początkowa .....	226
9.3.2. Częstotliwości drgań własnych .....	230
9.4. Belka spoczywająca na podłożu .....	235
Literatura .....	238